УДК 519.21

МІШАНІ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНІ СТАТИСТИЧНІ СТРУКТУРИ

Ю.І. ВОЛКОВ

Мы вводим и изучаем обобщенные семейства смешанных экспоненциальных распределений и соответствующие им линейные положительные операторы, которые включают некоторые известные операторы как частные случаи.

We introduce and study the generalized family of mixed exponential distributions and corresponding to them linear positive operators which includes some know operators as special cases.

Спочатку в п.1 і п.2 визначимо дві допоміжні статистичні структури ***B*** і ***H***, за допомогою яких в п.3 дамо означення основного об’єкта статті: структури типу Філліпса.

1. Статистичні структури *B*

Будемо позначати через $b_{n,k}(x), k = 0,1,2,\ldots$ цілочисельну статистичну структуру, яка залежить від параметрів $x \in X, n \in N$, і таку, що

$$b(x)\frac{d}{dx}b_{n,k}(x) = (k - nx)b_{n,k}(x), \tag{1}$$

де *b(x)* невід’ємна функція, яку називатимемо *коваріаційною характеристикою* структури. Цю структуру називатимемо структурою ***B***.

Примітка. Не всяка невід’ємна функція *b(x)* може бути коваріаційною характеристикою структури ***B***, наприклад, функції $b(x) = 1$, $b(x) = x^2$ не можуть ними бути.

Структуру **B** можна побудувати так. Візьмемо степеневий ряд $\omega(y)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^k$ із невід'ємними коефіцієнтами, $a_k \geq 0$, $0 \leq y < R$, (R–радіус збіжності ряду). Розглянемо випадкову величину ξ, яка може приймати невід'ємні цілі значення з ймовірностями

$$P\{\xi=k\}:=b_k\frac{y^k}{(\omega(y))^n},\ k=0,1,2,\ldots, \tag{2}$$

де b_k коефіцієнти розкладу в степеневий ряд функції $(\omega(y))^n, n\in N$.

Послідовність (1) визначає статистичну структуру з параметрами y і n, при цьому $\mathrm{M}\xi=ny\frac{\omega'(y)}{\omega(y)}$, а $\mathrm{D}\xi=ny\frac{dM\xi}{dy}$. Позначимо через $y(x)$ функцію, обернену до функції (існує, бо $\mathrm{D}\xi\geq 0$)

$$x=y\omega'(y)/\omega(y), \tag{3}$$

а через $b(x):=\frac{y(x)}{y'(x)}$, тоді математичне сподівання $\mathrm{M}\xi=nx$, а дисперсія $\mathrm{D}\xi=nb(x)$. В результаті отримаємо сім'ю розподілів, яка залежатиме від параметра x:

$$b_{n,k}(x):=b_k\frac{(y(x))^k}{(\omega(y(x)))^n}.$$

Доведемо, що функції $b_{n,k}(x)$ задовольняють співвідношення (1). Маємо:

$$\log b_{n,k}(x)=\log b_k+k\log y(x)-n\log\omega(y(x)).$$

Тому

$$\frac{b'_{n,k}(x)}{b_{n,k}(x)}=k\frac{y'(x)}{y(x)}-n\frac{y'(x)\omega'(y(x))}{\omega(y(x))}=\frac{k}{b(x)}-n\frac{y'(x)}{y(x)}\frac{y(x)\omega'(y(x))}{\omega(y(x))},$$

і з врахуванням (3) звідси отримаємо (1).

Лема 1. *Нехай $I(x)$ інформація за Фішером структури* ***B****. Тоді* $I(x)=\frac{n}{b(x)}$.

Справді,

$$I(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{d\log b_{n,k}(x)}{dx}\right)^2 b_{n,k}(x)=(b(x))^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}(k-nx)^2 b_{n,k}(x)=\frac{n}{b(x)}.$$

Лема 2. *Нехай $\beta_m(x)$ центральні моменти розподілу. Тоді має місце така рекурентність*:

$$\beta_{m+1}(x)=b(x)\left(\frac{d\beta_m(x)}{dx}+nm\beta_{m-1}(x)\right),\ \beta_0(x)=1,\ \beta_1(x)=0. \tag{4}$$

Справді, $\beta_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)(k - nx)^m$. Тоді

$$\frac{d\beta_m(x)}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{db_{n,k}(x)}{dx}(k - nx)^m - \sum_{k=0}^{\infty} mnb_{n,k}(x)(k - nx)^{m-1} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (b(x))^{-1} b_{n,k}(x)(k - nx)^{m+1} - \sum_{k=0}^{\infty} mnb_{n,k}(x)(k - nx)^{m-1},$$

а звідси випливає (4).

Наслідок.

$$\beta_m(x) = \begin{cases} c_m n^r (b(x)) + O(n^{r-1}), \text{ÿêùî} \quad m = 2r \\ c_m n^r (b(x)) b'(x) + O(n^{r-1}), \text{ÿêùî} \quad m = 2r + 1 \end{cases},$$

де $c_m = \begin{cases} (2r-1)!!, \text{ÿêùî} \quad \mathrm{m = 2r} \\ \frac{1}{2}(2r)!! \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(2i+1)!!}{(2i)!!}, \text{ÿêùî} \quad \mathrm{m = 2r + 1} \end{cases}.$

Приклад 1. Функція $\omega(y) = 1 + y$ породжує структуру $b_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, $0 \le x \le 1$, $b(x) = x(1-x)$, тобто біноміальний розподіл з параметрами *n* і *x*.

Приклад 2. Функція $\omega(y) = e^y$ породжує структуру $b_{n,k}(x) = e^{-nx} \dfrac{(nx)^k}{k!}$, $0 \le x < \infty$, $b(x) = x$, тобто розподіл Пуассона з параметром *nx*.

Приклад 3. Функція $\omega(y) = \dfrac{1}{1-y}$ породжує структуру $b_{n,k}(x) = C_{n+k}^k x^k (1+x)^{-n-k}$, $0 \le x < \infty$, $b(x) = x(1+x)$, тобто від'ємний біноміальний розподіл з параметрами *n* і *x*.

Приклад 4. Функція $\omega(y) = \dfrac{1-\sqrt{1-4y}}{2y}$ породжує структуру

$$b_{n,k}(x) = \frac{n}{2k+n} C_{2k+n}^k x^k (1+x)^{n+k} (1+2x)^{-n-2k}, \; 0 \le x < \infty, \; b(x) = x(1+x)(1+2x),$$

тобто розподіл Каталана з параметрами *n* і *x* (див.[5], стор.31).

Багато прикладів таких структур отримано в [6].

2. Статистичні структури *H*

Розглянемо ще одну допоміжну статистичну структуру, яка визначається сім'єю щільностей $h_{n,k}(t), k = 0,1,2,\ldots$, з параметрами $k \in N,\ n \in N$, і таку, що

$$h(t)\frac{d}{dt}h_{n,k}(t) = (k - nt)h_{n,k}(t), \qquad (5)$$

де *h(t)* невід'ємна функція, яку називатимемо *коваріаційною характеристикою* структури. Цю структуру називатимемо структурою ***H***.

Структуру ***H*** можна побудувати наступним чином. Візьмемо міру $\mu(t)dt$ (абсолютно неперервну відносно міри Лебега) для якої існує перетворення Лапласа $u(s)=\int_R e^{-s\tau}\mu(\tau)d\tau$. Нехай $t=-\frac{u'(s)}{u(s)}$ і позначимо через $s(t)$ функцію, обернену до функції $t=t(s)$, а через $h(t):=-\frac{1}{s'(t)}$. Тоді $h_{n,k}(t)=c_{n,k}e^{-s(t)k}(u(s(t)))^{-n}$ де $c_{n,k}=\left(\int_R e^{-s(t)k}(u(s(t)))^{-n}dt\right)^{-1}$ (якщо інтеграл збіжний).

Доведемо, що функції $h_{n,k}(x)$ задовольняють співвідношення (1). Маємо:

$\log h_{n,k}(t)=\log c_{n,k}-ks(t)-n\log u(s(t))$. Тому $\frac{h'_{n,k}(t)}{h_{n,k}(t)}=-ks'(t)-ns'(t)\frac{u'(s(t))}{u(s(t))}$,

а звідси отримаємо (5).

Лема 3. *Структура* ***H*** *існує, якщо* $h(t)=at^2+bt+c$, а *вектор* (a,b,c) *може набувати таких значень:* (-1,1,0), (1,1,0), (0,1,0), (1,0,0), (0,0,1), (1,0,1).

Доведення. Ми просто вказуємо ці структури, для яких співвідношення (5) перевіряється безпосередньо.

Стуктура (-1,1,0):

$h_{n,k}(t)=(n+1)C_n^k t^k(1-t)^k,\ k=0,1,2,\ldots,\ 0\le t\le 1,\ h(t)=t(1-t)$.

Стуктура (1,1,0):

$h_{n,k}(t)=(n-1)C_{n+k}^k t^k(1+t)^{-n-k}, k=0,1,2,\ldots, 0<t<\infty,\ h(t)=t(1+t), n>2$.

Стуктура (0,1,0):

$h_{n,k}(t)=e^{-nt}n^{k+1}t^k/k!,\ k=0,1,2,\ldots,\ 0<t<\infty, h(t)=t$.

Стуктура (1,0,0):

$h_{n,k}(t)=\frac{k^{n-1}t^{-n}}{\Gamma(n-1)}e^{-k/n},\ k=0,1,2,\ldots,\ 0<t<\infty,\ h(t)=t^2, n>2$.

Стуктура (0,0,1):

$h_{n,k}(t)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\exp\left(-\frac{(k-nt)^2}{2n}\right),\ k=0,1,2,\ldots,-\infty<t<\infty,\ h(t)=1$.

Стуктура (1,0,1):

$h_{n,k}(t)=c_{n,k}\exp(karctgt)(1+t^2)^{-n/2},\ k=0,1,2,\ldots,\ n>2,$

$-\infty<t<\infty,\ h(t)=1+t^2,$

де

$$(c_{n,k})^{-1} = \frac{2\,\mathrm{sh}(k\pi/2)(2m-2)!}{(k^2+4)(k^2+16)\cdots(k^2+(2m-2)^2)}$$, якщо n=2m,

$$(c_{n,k})^{-1} = \frac{2\,\mathrm{ch}(k\pi/2)(2m)!}{(k^2+1)(k^2+9)\cdots(k^2+(2m-1)^2)}$$, якщо n=2m.

Примітка. Якщо аргумент t щільності $h_{n,k}(t), k = 0,1,2,\ldots$ вказується на проміжку відмінному від всієї числової осі, то вважається, що поза цим проміжком щільність дорівнює нулю.

Далі використовуватимо структури з квадратичною коваріаційною характеристикою.

Лема 4. *Якщо позначити через* α_1 *початковий момент розподілу* ***H*****,** *то* $\alpha_1 = \dfrac{k+b}{n-2a}$**.**

Доведення. Перепишемо співвідношення (5) так:

$nth_{n,k}(t) = kh_{n,k}(t) - (at^2+bt+c)h'_{k,t}(t)$ і проінтегруємо. Отримаємо

$$n\alpha_1 = k - \int_{-\infty}^{\infty}(at^2+bt+c)h'_{k,t}(t)dt =$$

$$k - \left(((at^2+bt+c)h_{k,t}(t)\,|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(2at+b)h_{n,k}(t)dt \right) = k + 2a\alpha_1 + b.$$

Звідси випливає твердження леми.

Лема 5. *Якщо позначити через* $\nu_m(x)$ *центральні моменти розподілу* ***H*****,** *то має місце така рекурентність:*

$$\nu_m(k) = \frac{1}{n-a(m+1)}((m(2\alpha_1+b)-(n\alpha_1-k))\nu_{m-1} + (m-1)(a\alpha_1{}^2+b\alpha_1+c)\nu_{m-2}, \quad (6)$$

$\nu_0 = 1,\ \nu_1 = 0.$

Доведення. Перепишемо співвідношення (5) так:

$$(n\alpha_1 - k)h_{n,k}(t) + n(t-\alpha_1)h_{n,k}(t) = -(at^2+bt+c)h'_{k,t}(t) = -(a\alpha_1{}^2 + b\alpha_1 + c +$$
$$+(2a\alpha_1+b)(t-\alpha_1) + a(t-\alpha_1)^2 h'_{k,t}(t).$$

Помножимо обидві частини цеї рівності на $(t-\alpha_1)^{m-1}$ і проінтегруємо, отримаємо

$$(n\alpha_1 - k)\nu_{m-1} + n\nu_m = (at^2+bt+c)h_{k,t}(t)\,|_{-\infty}^{\infty} + (m-1)(a\alpha_1{}^2+b\alpha_1+c)\nu_{m-2} +$$
$$+ a(m+1)\nu_m.$$

Звідси випливає (6).

Зокрема, якщо m=2, то

$$\nu_2 = \frac{(k+b)(ak+bn-ab)}{(n-2a)^2(n-3a)} + \frac{c}{n-3a}.$$

3. Структури типу Філліпса

Означення. *Статистичною структурою типу Філліпса називатимемо сім'ю щільностей* $p_n(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)h_{n,k}(t)$, *яка залежить від параметра* $x, x\in X$, *де X образ проміжка* $[0,R)$ *при відображенні* $x=x(y)$ (див.(3)).

Нехай функція f визначена й інтегровна на всій числовій осі. Позначимо через $P_n(f,x)$ математичне сподівання випадкової величини $f(\eta)$, де розподіл випадкової величини η задано щільністю $p_n(x,t)$, тобто

$$P_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h_{n,k}(t)dt. \qquad (7)$$

Корисно дивитись на $P_n(f,x)$ як на оператор, він є лінійним додатним. Функцію $b_{n,k}(x)$ називатимемо дискретним ядром оператора, а функцію $h_{n,k}(t)$ неперервним ядром.

Так, якщо $f(t)=t$, то отримаємо математичне сподівання η, і у випадку щільностей , які наведені вище, **M** $\eta=\alpha(x)=(nx+b)/(n-2a)$, $n>2a$, справді,

$$\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)\int_{-\infty}^{\infty} th_{n,k}(t)dt=\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)\alpha_1=\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)\frac{k+b}{n-2a}=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)\frac{(k-nx)+(nx+b)}{n-2a}=\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)\frac{(k-nx)}{n-2a}+$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)\frac{(nx+b)}{n-2a}=0+\frac{nx+b}{n-2a}\cdot 1=\frac{nx+b}{n-2a}.$$

Якщо $f(t)=(t-$ **M** $\eta)^m$, то $P_n(f,x)=\mu_m(x)-$ центральні моменти m-го порядку випадкової величини η.

В роботі досліджується статистичні структури типу Філліпса і оператор $P_n(f,x)$.

Теорема 1. *Нехай коваріаційна характеристика структури* ***H*** *многочлен степеня r. Тоді для центральних моментів випадкової величини* η *має місце таке рекурентне співвідношення*

$$b(x)(\mu_m'(x)+m\alpha'(x)\mu_{m-1}(x))=n\mu_{m+1}(x)+$$
$$n(\alpha(x)-x)\mu_m(x)-\sum_{i=0}^{r}\frac{m+i}{i!}h^{(i)}(\alpha(x))\mu_{m+i-1}(x).$$

Доведення. Спочатку встановимо таке допоміжне твердження:

Нехай функція f(t) многочлен r–го степеня, а функція p(t) неперервно диференційовна на проміжку $[a,b]$ і $f(a)p(a)=f(b)p(b)=0$.

Тоді

$$\int_a^b f(t)p'(t)(t-x)^m dt=-\sum_{i=0}^{r}(m+i)\frac{f^{(i)}(x)}{i!}\int_a^b p(t)(t-x)^{m+i-1}dt.$$

Справді, за формулою Тейлора $f(t)=\sum_{i=0}^{r}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}(t-x)^i$. Тому

$$\int_a^b f(t)p'(t)(t-x)^m dt=\int_a^b\sum_{i=0}^{r}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}p'(t)(t-x)^{m+i}dt=\sum_{i=0}^{r}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}\int_a^b p'(t)(t-x)^{m+i}dt=$$

$$\sum_{i=0}^{r}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}\left(p(t)(t-x)^{m+i}\,|_a^b-(m+i)\int_a^b p(t)(t-x)^{m+i-1}dt\right)=$$

$$\sum_{i=0}^{r}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}\left(p(b)(b-x)^{m+i}-p(a)(a-x)^{m+i}-(m+i)\int_a^b p(t)(t-x)^{m+i-1}dt\right)=$$

$$(b-x)^m p(b)f(b)-(b-x)^m p(b)f(b)-\sum_{i=0}^{r}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}\left((m+i)\int_a^b p(t)(t-x)^{m+i-1}dt\right)=$$

$$-\sum_{i=0}^{r}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}\left((m+i)\int_a^b p(t)(t-x)^{m+i-1}dt\right).$$

Через те, що центральні моменти m–го порядку знаходяться за формулою

$\mu_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{n,k}(x)\int_{-\infty}^{\infty}(t-\alpha(x))^m h_{n,k}(t)dt$, то звідси отримаємо

$$b(x)\mu_m'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{n,k}(x)(k-nx)\int_{-\infty}^{\infty}(t-\alpha(x))^m h_{n,k}(t)dt-mb(x)\alpha(x)\mu_{m-1}(x),$$

а звідси

$$b(x)(\mu_m'(x)+mb(x)\alpha(x)\mu_{m-1}(x))=\sum_{k=0}^{\infty}b_{n,k}(x)\int_{-\infty}^{\infty}(k-nt)(t-\alpha(x))^m h_{n,k}(t)dt+$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_{n,k}(x)\int_{-\infty}^{\infty}(n(t-\alpha(x))+n(\alpha(x)-x))(t-\alpha(x))^m h_{n,k}(t)dt=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_{n,k}(x)\int_{-\infty}^{\infty}h(t)(t-\alpha(x))^m h_{n,k}'(t)dt+n\mu_{m+1}(x)+n(\alpha(x)-x)\mu_m(x).$$

Залишилося скористуватись допоміжним твердженням. Отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(t)(t-\alpha(x))^m h_{n,k}'(t)dt=-\sum_{i=0}^{r}\frac{(m+i)}{i!}h^{(i)}(\alpha(x))\int_a^b p_{n,k}(t)(t-\alpha(x))^{m+i-1}dt.$$

А звідси випливає твердження теореми.

Наслідок. *Якщо* $h(t)=at^2+bt+c$, *то для центральних моментів структури Філліпса матимемо таке рекурентне співвідношення*

$$(n-a(m+2))\mu_{m+1}(x)=b(x)\mu_m'(x)+\mu_m(x)((m+1)(2a\alpha(x)+b)-n(\alpha(x)-x))+$$

$$\mu_{m-1}(m(a(\alpha(x))^2+b\alpha(x)+c)+mb(x)\alpha'(x)).$$

Зокрема, якщо m=1, то звідси отримаємо

$$\mu_2(x) = \frac{1}{n-3a}(a(\alpha(x))^2 + b\alpha(x) + c + b(x)\alpha'(x)) =$$

$$\frac{1}{n-3a}\left(a\left(\frac{nx+b}{n-2a}\right)^2 + b\frac{nx+b}{n-2a} + b(x)\frac{n}{n-2a}\right), \text{ n > 3a}.$$

Приклад 5. *Нехай щільність* $h_{n,k}(t) = e^{-nt}\dfrac{n^{k+1}t^{k+1}}{k!}$. *Тоді центральні моменти* $\mu_m(x)$ *випадкової величини* η *задовольняють рекурентне співвідношення*

$$\mu_{m+1}(x) = \frac{1}{n}\left(b(x)\frac{d\mu_m(x)}{dx} + m\mu_m(x) + m\mu_{m-1}(x)\left(b(x) + x + \frac{1}{n}\right)\right), \mu_0 = 1, \mu_1 = 0.$$

Звідси $\mu_2(x) = \dfrac{x+b(x)}{n} + \dfrac{1}{n^2}$.

Приклад 6. *Нехай щільність* $h_{n,k}(t) = (n-1)C^k_{n+k+1}\dfrac{t^k}{(1+t)^{n+k}}$. *Тоді центральні моменти* $\mu_m(x)$ *випадкової величини* η *задовольняють рекурентне співвідношення*

$$\mu_{m+1}(x) = \frac{1}{n-m-2}\left(b(x)\frac{d\mu_m(x)}{dx} + \frac{nm(2x+1)}{n-2}\mu_m(x) + \right.$$

$$\left.\left(\left(\frac{nx+1}{n-2}\right)^2 + \frac{nx+1}{n-2} + \frac{n}{n-2}b(x)\right)m\mu_{m-1}(x)\right), n > m+2, \mu_0 = 1, \mu_1 = 0.$$

Звідси $\mu_2(x) = \dfrac{1}{n-3}\left(\left(\dfrac{nx+1}{n-2}\right)^2 + \dfrac{nx+1}{n-2} + \dfrac{n}{n-2}b(x)\right)$.

4. Апроксимаційні властивості

Теорема 2. *Нехай* $f \in H^\omega$. *Тоді для n>3a*

$$|P_n(f,x) - f(x)| \le$$

$$\omega(1/\sqrt{n})\left(1 + \frac{n}{n-3a}\left(a\left(\frac{nx+b}{n-2a}\right)^2 + b\frac{nx+b}{n-2a} + b(x)\frac{n}{n-2a}\right)\right) + \omega\left(\left|\frac{2ax+b}{n-2a}\right|\right).$$

Доведення.

$$|P_n(f,x) - f(x)| \le | P_n(f,x) - f(\alpha(x)| + | f(\alpha(x)) - f(x)| \le$$

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)\int_{-\infty}^{\infty} | f(t) - f(\alpha(x))| h_{n,k}(t)dt + \omega(|\alpha(x) - x|) \le$$

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)\int_{-\infty}^{\infty} | \omega(| t - \alpha(x)|)h_{n,k}(t)dt + \omega(|\alpha(x) - x|) \le$$

$$\omega(\delta)\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)\int_{-\infty}^{\infty}(1 + [\delta^{-1} | t - \alpha(x)|])h_{n,k}(t)dt + \omega(|\alpha(x) - x|) \le$$

$$\omega(\delta)(1+\int\limits_{t:[\delta^{-1}|t-\alpha(x)|]\ge 1}[\delta^{-1}|t-\alpha(x)|]\sum_{k=0}^{\infty}b_{n,k}(x)h_{n,k}(t)dt+\omega(|\alpha(x)-x|)\le$$

$$\omega(\delta)(1+\sum_{k=0}^{\infty}b_{n,k}(x)\delta^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}(t-\alpha(x))^2h_{n,k}(t)dt+\omega(|\alpha(x)-x|)=$$

$$\omega(\delta)(1+\delta^{-2}\mu_2(x))+\omega(|\alpha(x)-x|).$$

Якщо тепер взяти $\delta=1/\sqrt{n}$, то отримаємо твердження теореми.

Зауваження.

1. Якщо $b_{n,k}(x)=e^{-nx}(nx)^k/k!$, а $h_{n,k}(t)=e^{-nt}\dfrac{n^{k+1}t^{k+1}}{k!}$, то оператор $P_n(f,x)$ перетворюється в дещо модифікований оператор Філліпса [1], який використовувався ним для отримання однієї із формул обернення трансформації Лапласа. Цим фактом пояснюється назва досліджуваної статистичної структури й відповідного оператора.

Для таких операторів з теореми 2 випливає нерівність

$$|P_n(f,x)-f(x)|\le\omega(1/\sqrt{n})\left(1+x+x^2\right), x\ge 0.$$

2. Є цілий ряд досліджень апроксимаційних властивостей операторів типу $P_n(f,x)$, де в якості функцій $b_{n,k}(x)$ і $h_{n,k}(t)$ беруться конкретні функції, породжені такими розподілами як біноміальний, від'ємний біноміальний, гама, бета розподіли. Наприклад, якщо в якості дискретного ядра взяти

$$b_{n,k}(x)=C_n^k x^k(1-x)^{n-k},\ 0\le \mathrm{x}\le 1,$$

а в якості неперервного ядра взяти

$$h_{n,k}(t)=(n+1)C_n^k t^k(1-t)^k, 0\le \mathrm{t}\le 1,$$

то отримаємо многочлени Бернштейна-Дюррмайєра (див.[2]).
Для цих многочленів з теореми 2 випливає нерівність

$$|P_n(f,x)-f(x)|\le\frac{1}{4}\omega(1/\sqrt{n})+\omega(1/n),\ 0\le \mathrm{x}\le 1.$$

Якщо

$$b_{n,k}(x)=e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!},\ 0\le x<\infty,\ h_{n,k}(t)=(n-1)C_{n+k}^k t^k(1+t)^{-n-k}, 0<t<\infty,$$

то отримаємо оператори Саса-Баскакова ([3]), для таких операторів з теореми 2 випливає нерівність

$$|P_n(f,x)-f(x)|\le\omega(1/\sqrt{n})\left(1+\frac{n^2x^2+2n^2x-2nx+n-2}{(n-2)^2(n-3)}n\right)+\omega\left(\frac{2x+1}{n-2}\right), x\ge 0, n>3.$$

Якщо

$$b_{n,k}(x)=C_{n+k}^k x^k(1+x)^{-n-k}, 0<x<\infty,\ \ h_{n,k}(t)=(n-1)C_{n+k}^k t^k(1+t)^{-n-k}, 0<t<\infty,$$

то отримаємо оператори Дюррмайєра-бета ([4]), для таких операторів з теореми 2 випливає нерівність

$$|P_n(f,x)-f(x)|\le$$

$$\omega(1/\sqrt{n})\left(1+\frac{n}{n-3}\left(\left(\frac{nx+1}{n-2}\right)^2+\frac{nx^2+2nx+1}{n-2}\right)\right)+\omega\left(\left|\frac{2x+1}{n-2}\right|\right), x>0, n>3.$$

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Phillips R.S. An inversion formula for Laplase transforms and semi-groups of linear operators, Ann.of Math., 59, (1954), 325-356.

2. Durrmeier J.L. Une formule d'inversion, de la transformee de Laplace: Application a la Theorie des Moments, These de 3e Cycle, Faculte des Sciences de l'Universite de Paris, 1967.

3. Gupta V., Vasishtha V, Gupta M.K. Rate of convergence of summation-integral type operators with derivatives of bounded variation, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Volume 4, Issue 2, Article 34, 2003.

4. Naokant Deo. Direct Result on the Durrmeyer Variant of Beta Operators, Sousheast Asian Bulletin of Mathematics, 32, (2008), 283-290.

5. Волков Ю.І. Додатні оператори. Наближення. Імовірність. Київ: НМК ВО, 1992.-200с.

6. Волков Ю.І. Розподіли степеневих рядів із заданими коваріаціями. Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету, Серія: фізико-математичні науки, Випуск 43, 2002 р., с. 16-21.